

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**Карачаево-Черкесский государственный университет
имени У. Д. Алиева**

Кафедра математического анализа

**ЭКОНОМЕТРИКА: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ И ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ**

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ



Карачаевск – 2025

УДК 519.8626

Печатается по решению редакционно-издательского совета Карачаево-Черкесского государственного университета

**Эконометрика: методы решения задач и типовых расчетов.
Методическое пособие. Карачаевск: изд-во КЧГУ, 2025. - 40с.**

Предлагаемое методическое пособие по дисциплинам «Эконометрика», «Эконометрика» (продвинутый уровень) предназначено для бакалавров и магистрантов ряда направлений подготовки дневного и заочного отделений физико-математического факультета и факультета экономики и управления. Практический материал сопровождается примерами и задачами. Приведены варианты заданий для контрольных работ, комплекты расчетно-графических заданий и типовых расчетов.

Составитель:

А. М. Мамчуев, к.ф.-м.наук, доц. (КЧГУ)

Рецензенты:

М. Х. Чанкаев, к.ф.-м.наук, доц. (КЧГУ)

Р. А. Боташев, доц. (КЧГУ)

© Карачаево-Черкесский государственный университет, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ.....	5
1. Парная регрессия и корреляция.....	5
1.1 Варианты индивидуальных заданий.....	9
2. Множественная регрессия и корреляция.....	13
2.1 Варианты индивидуальных заданий.....	20
3. Временные ряды.....	23
3.1 Варианты индивидуальных заданий	27
4. Системы эконометрических уравнений.....	28
4.1 Варианты индивидуальных заданий	31
II. МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ.....	34
III. ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЧЕТА (ЭКЗАМЕНА).....	37
ЛИТЕРАТУРА.....	38

ВВЕДЕНИЕ

В методическом пособии нашли детальное изложение основные эконометрические типовые задачи и расчеты, методы их решения, а также варианты домашних заданий (контрольной работы), как для студентов стационара, так и ОЗО, для направлений бакалавриата и магистратуры.

I. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ВАРИАНТА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

1. ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Пример. По территориям региона приводятся данные за 2000 г.

Таблица 1

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	78	133
2	82	148
3	87	134
4	79	154
5	89	162
6	106	195
7	67	139
8	88	158
9	73	152
10	87	162
11	76	159
12	115	173

Требуется:

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x .
2. Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.
3. Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции с помощью F - критерия Фишера и t - критерия Стьюдента.
4. Выполнить прогноз заработной платы y при прогнозном значении среднедушевого прожиточного минимума x , составляющем 107% от среднего уровня.
5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.
6. На одном графике построить исходные данные и теоретическую прямую.

Решение

1. Для расчета параметров уравнения линейной регрессии строим расчетную таблицу 2.

Таблица 2

		y	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y - \hat{y}_x$	A_i
1	78	133	10374	6084	17689	149	-16	12,0
2	82	148	12136	6724	21904	152	-4	2,7
3	87	134	11658	7569	17956	157	-23	17,2
4	79	154	12166	6241	23716	150	4	2,6
5	89	162	14418	7921	26244	159	3	1,9
6	106	195	20670	11236	38025	174	21	10,8
7	67	139	9313	4489	19321	139	0	0,0
8	88	158	13904	7744	24964	158	0	0,0
9	73	152	11096	5329	23104	144	8	5,3
10	87	162	14094	7569	26244	157	5	3,1
11	76	159	12084	5776	25281	147	12	7,5
12	115	173	19895	13225	29929	183	-10	5,8
Итого	1027	1869	161808	89907	294377	1869	0	68,9
Среднее значение	85,6	155,8	13484,0	7492,3	24531,4	—	—	5,7
σ	12,84	16,05	—	—	—	—	—	—
σ^2	164,94	257,76	—	—	—	—	—	—

$$b = \frac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{13484 - 155,8 \cdot 85,6}{7492,3 - 85,6^2} = \frac{147,52}{164,94} = 0,89;$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 155,8 - 0,89 \cdot 85,6 = 79,62.$$

Получено уравнение регрессии: $y = 79,62 + 0,89 \cdot x$.

С увеличением среднедушевого прожиточного минимума на 1 руб. среднедневная заработная плата возрастает в среднем на 0,89 руб.

2. Тесноту линейной связи оценит коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,89 \cdot \frac{12,84}{16,05} = 0,712; \quad r_{xy}^2 = 0,51.$$

Это означает, что 51% вариации заработной платы (y) объясняется вариацией фактора x – среднедушевого прожиточного минимума.

Качество модели определяет средняя ошибка аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum A_i = \frac{68,9}{12} = 5,74\%.$$

Качество построенной модели оценивается как хорошее, так как $\bar{A}$ не превышает 8-10%.

3. Оценку значимости уравнения регрессии в целом проведем с помощью F - критерия Фишера. Фактическое значение F - критерия:

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot (n - 2) = \frac{0,51}{1 - 0,51} \cdot 10 = 10,41.$$

Табличное значение критерия при пятипроцентном уровне значимости и степенях свободы $k_1 = 1$ и $k_2 = 12 - 2 = 10$ составляет $F_{\text{табл}} = 4,96$. Так как $F_{\text{факт}} = 10,41 > F_{\text{табл}} = 4,96$, то уравнение регрессии признается статистически значимым.

Оценку статистической значимости параметров регрессии проведем с помощью t - статистики Стьюдента и путем расчета доверительного интервала каждого из показателей.

Табличное значение t - критерия для числа степеней свободы $df = n - 2 = 12 - 2 = 10$ и $\alpha = 0,05$ составит $t_{\text{табл}} = 2,23$.

Определим случайные ошибки m_a , m_b ,

$$m_{r_{xy}} : m_a = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n \cdot \sigma_x} = 12,6 \cdot \frac{\sqrt{89907}}{12 \cdot 12,84} = 24,5;$$

$$m_b = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}} = \frac{12,6}{12,95 \cdot \sqrt{12}} = 0,281; m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,51}{12 - 2}} = 0,219.$$

$$\text{Тогда, } t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{79,616}{24,6} = 3,2; t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0,89}{0,281} = 3,2; t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}} = \frac{0,712}{0,219} = 3,3$$

Фактические значения t - статистики превосходят табличное значение:

$$t_a = 3,2 > t_{\text{табл}} = 2,3; \quad t_b = 3,3 > t_{\text{табл}} = 2,3; \quad t_{r_{xy}} = 3,3 > t_{\text{табл}} = 2,3,$$

поэтому параметры a , b и r_{xy} не случайно отличаются от нуля, а статистически значимы.

Рассчитаем доверительные интервалы для параметров регрессии a и b . Для этого определим предельную ошибку для каждого показателя:

$$\Delta_a = t_{\text{табл}} \cdot m_a = 2,23 \cdot 24,5 = 54,64;$$

$$\Delta_b = t_{\text{табл}} \cdot m_b = 2,23 \cdot 0,281 = 0,62.$$

Доверительные интервалы

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a = 79,62 \pm 54,64; \gamma_{a_{\min}} = 79,62 - 54,64 = 24,98;$$

$$\gamma_{a_{\max}} = 79,62 + 54,64 = 134,26; \gamma_b = b \pm \Delta_b = 0,89 \pm 0,62;$$

$$\gamma_{b_{\min}} = 0,89 - 0,62 = 0,27; \gamma_{b_{\max}} = 0,89 + 0,62 = 1,51.$$

Анализ верхней и нижней границ доверительных интервалов приводит к выводу о том, что с вероятностью $p = 1 - \alpha = 0,95$ параметры a и b , находясь в указанных границах, не принимают нулевых значений, т.е. не являются статистически незначимыми и существенно отличны от нуля.

4. Полученные оценки уравнения регрессии позволяют использовать его для прогноза. Если прогнозное значение прожиточного минимума составит: $x_p = \bar{x} \cdot 1,07 = 85,6 \cdot 1,07 = 91,6$ руб., тогда прогнозное значение заработной платы составит: $\bar{y}_p = 79,62 + 0,89 \cdot 91,6 = 161,14$ руб.

5. Ошибка прогноза составит:

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = 12,6 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(91,6 - 85,6)^2}{12 \cdot 12,84^2}} = 13,22.$$

Предельная ошибка прогноза, которая в 95% случаев не будет превышена, составит:

$$\Delta_{\hat{y}_p} = t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_p} = 2,23 \cdot 13,22 = 29,48.$$

Доверительный интервал прогноза:

$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p} = 161,14 \pm 29,48; \gamma_{\hat{y}_{p\min}} = 161,14 - 29,48 = 131,66 \text{ руб.};$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p\max}} = 161,14 + 29,48 = 190,62 \text{ руб.}$$

Выполненный прогноз среднемесячной заработной платы является надежным ($p = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$) и находится в пределах от 131,66 руб. до 190,62 руб.

6. В заключение решения задачи построим на одном графике исходные данные и теоретическую прямую (рис. 1):

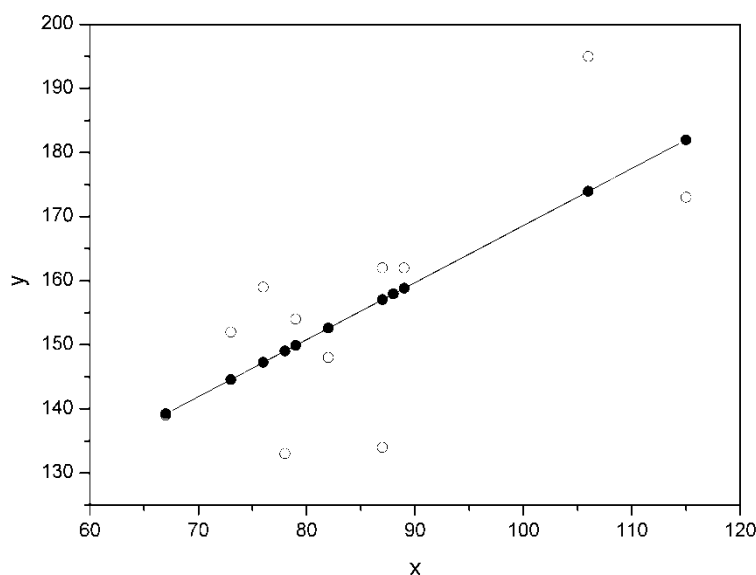


Рис. 1.

1.1 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1. По территориям региона приводятся данные за 201X г. (см. таблицу своего варианта).

Требуется:

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x .
2. Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.
3. Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции с помощью F - критерия Фишера и t - критерия Стьюдента.
4. Выполнить прогноз заработной платы y при прогнозном значении среднедушевого прожиточного минимума x , составляющем 107% от среднего уровня.
5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.
6. На одном графике построить данные и теоретическую прямую.
7. Найти коэффициенты корреляции и детерминации.

Вариант 1

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	81	124
2	77	131
3	85	146
4	79	139
5	93	143
6	100	159
7	72	135
8	90	152
9	71	127
10	89	154
11	82	127
12	111	162

Вариант 2

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	74	122
2	81	134
3	90	136

4	79	125
5	89	120
6	87	127
7	77	125
8	93	148
9	70	122
10	93	157
11	87	144
12	121	165

Вариант 3

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., х	Среднедневная заработная плата, руб., у
1	77	123
2	85	152
3	79	140
4	93	142
5	89	157
6	81	181
7	79	133
8	97	163
9	73	134
10	95	155
11	84	132
12	108	165

Вариант 4

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., х	Среднедневная заработная плата, руб., у
1	83	137
2	88	142
3	75	128
4	89	140
5	85	133
6	79	153
7	81	142
8	97	154
9	79	132
10	90	150
11	84	132
12	112	166

Вариант 5

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., х	Среднедневная заработная плата, руб., у
1	79	134
2	91	154
3	77	128
4	87	138
5	84	133
6	76	144
7	84	160
8	94	149
9	79	125
10	98	163
11	81	120
12	115	162

Вариант 6

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., х	Среднедневная заработная плата, руб., у
1	92	147
2	78	133
3	79	128
4	88	152
5	87	138
6	75	122
7	81	145
8	96	141
9	80	127
10	102	151
11	83	129
12	94	147

Вариант 7

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., х	Среднедневная заработная плата, руб., у
1	75	133

2	78	125
3	81	129
4	93	153
5	86	140
6	77	135
7	83	141
8	94	152
9	88	133
10	99	156
11	80	124
12	112	156

Вариант 8

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., х	Среднедневная заработная плата, руб., у
1	69	124
2	83	133
3	92	146
4	97	153
5	88	138
6	93	159
7	74	145
8	79	152
9	105	168
10	99	154
11	85	127
12	94	155

Вариант 9

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., х	Среднедневная заработная плата, руб., у
1	78	133
2	94	139
3	85	141
4	73	127
5	91	154
6	88	142
7	73	122
8	82	135
9	99	142
10	113	168
11	69	124

12	83	130
----	----	-----

Вариант 10

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	97	161
2	73	131
3	79	135
4	99	147
5	86	139
6	91	151
7	85	135
8	77	132
9	89	161
10	95	159
11	72	120
12	115	160

2. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Пример. По 20 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника y (тыс. руб.) от ввода в действие новых основных фондов x_1 (% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих x_2 (%).

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7,0	3,9	10,0	11	9,0	6,0	21,0
2	7,0	3,9	14,0	12	11,0	6,4	22,0
3	7,0	3,7	15,0	13	9,0	6,8	22,0
4	7,0	4,0	16,0	14	11,0	7,2	25,0
5	7,0	3,8	17,0	15	12,0	8,0	28,0
6	7,0	4,8	19,0	16	12,0	8,2	29,0
7	8,0	5,4	19,0	17	12,0	8,1	30,0
8	8,0	4,4	20,0	18	12,0	8,5	31,0
9	8,0	5,3	20,0	19	14,0	9,6	32,0
10	10,0	6,8	20,0	20	14,0	9,0	36,0

Требуется:

1. Построить линейную модель множественной регрессии. Записать стандартизованное уравнение множественной регрессии. На основе стандар-

тизованных коэффициентов регрессии и средних коэффициентов эластичности ранжировать факторы по степени их влияния на результат.

2. Найти коэффициенты парной, частной и множественной корреляции. Проанализировать их.

3. Найти скорректированный коэффициент множественной детерминации. Сравнить его с нескорректированным (общим) коэффициентом детерминации.

4. С помощью F - критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента детерминации $R^2_{yx_1x_2}$.

5. С помощью частных F - критериев Фишера оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 .

6. Составить уравнение линейной парной регрессии, оставив лишь один значащий фактор.

Решение

Для удобства проведения расчетов поместим результаты промежуточных расчетов в таблицу:

№	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7,0	3,9	10,0	27,3	70,0	39,0	15,21	100,0	49,0
2	7,0	3,9	14,0	27,3	98,0	54,6	15,21	196,0	49,0
3	7,0	3,7	15,0	25,9	105,0	55,5	13,69	225,0	49,0
4	7,0	4,0	16,0	28,0	112,0	64,0	16,0	256,0	49,0
5	7,0	3,8	17,0	26,6	119,0	64,6	14,44	289,0	49,0
6	7,0	4,8	19,0	33,6	133,0	91,2	23,04	361,0	49,0
7	8,0	5,4	19,0	43,2	152,0	102,6	29,16	361,0	64,0
8	8,0	4,4	20,0	35,2	160,0	88,0	19,36	400,0	64,0
9	8,0	5,3	20,0	42,4	160,0	106,0	28,09	400,0	64,0
10	10,0	6,8	20,0	68,0	200,0	136,0	46,24	400,0	100,0
11	9,0	6,0	21,0	54,0	189,0	126,0	36,0	441,0	81,0
12	11,0	6,4	22,0	70,4	242,0	140,8	40,96	484,0	121,0
13	9,0	6,8	22,0	61,2	198,0	149,6	46,24	484,0	81,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	11,0	7,2	25,0	79,2	275,0	180,0	51,84	625,0	121,0
15	12,0	8,0	28,0	96,0	336,0	224,0	64,0	784,0	144,0
16	12,0	8,2	29,0	98,4	348,0	237,8	67,24	841,0	144,0
17	12,0	8,1	30,0	97,2	360,0	243,0	65,61	900,0	144,0
18	12,0	8,5	31,0	102,0	372,0	263,5	72,25	961,0	144,0
19	14,0	9,6	32,0	134,4	448,0	307,2	92,16	1024,0	196,0
20	14,0	9,0	36,0	126,0	504,0	324,0	81,0	1296,0	196,0

Сумма	192	123,8	446	1276, 3	4581	2997, 4	837,7 4	10828, 0	1958, 0
Ср. знач.	9,6	6,19	22,3	63,81 5	229,05	149,8 7	41,88 7	541,4	97,9

Найдем средние квадратические отклонения признаков:

$$\sigma_y = \sqrt{y^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{97,9 - 9,6^2} = 2,396;$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{x_1^2 - \bar{x}_1^2} = \sqrt{41,887 - 6,19^2} = 1,890;$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{x_2^2 - \bar{x}_2^2} = \sqrt{541,4 - 22,3^2} = 6,642.$$

1. Вычисление параметров линейного уравнения множественной регрессии.

Для нахождения параметров линейного уравнения множественной регрессии

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

необходимо решить следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров a , b_1 , b_2 :

$$\begin{cases} na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 = \sum y; \\ a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 = \sum y x_1; \\ a \sum x_2 + b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 = \sum y x_2 \end{cases}$$

либо воспользоваться готовыми формулами:

$$b_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} \cdot \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2}; \quad b_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} \cdot \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2};$$

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2.$$

Рассчитаем сначала парные коэффициенты корреляции:

$$r_{yx_1} = \frac{\text{cov}(y, x_1)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{63,815 - 6,19 \cdot 9,6}{1,890 \cdot 2,396} = 0,970;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\text{cov}(y, x_2)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{229,05 - 22,3 \cdot 9,6}{6,642 \cdot 2,396} = 0,941;$$

$$r_{x_1 x_2} = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{149,87 - 6,19 \cdot 22,3}{1,890 \cdot 6,642} = 0,943.$$

Находим

$$b_1 = \frac{2,396}{1,890} \cdot \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{1 - 0,943^2} = 0,946;$$

$$b_2 = \frac{2,396}{6,642} \cdot \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{1 - 0,943^2} = 0,0856;$$

$$a = 9,6 - 0,946 \cdot 6,19 - 0,0856 \cdot 22,3 = 1,835.$$

Таким образом, получили следующее уравнение множественной регрессии:

$$y = 1,835 + 0,946 \cdot x_1 + 0,0856 \cdot x_2.$$

Коэффициенты β_1 и β_2 стандартизованного уравнения регрессии $t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \varepsilon$, находятся по формулам:

$$\beta_1 = b_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = 0,946 \cdot \frac{1,890}{2,396} = 0,746; \beta_2 = b_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = 0,0856 \cdot \frac{6,642}{2,396} = 0,237.$$

Т.е. уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{t}_y = 0,746 \cdot t_{x_1} + 0,237 \cdot t_{x_2}.$$

Так как стандартизованные коэффициенты регрессии можно сравнивать между собой, то можно сказать, что ввод в действие новых основных фондов оказывает большее влияние на выработку продукции, чем удельный вес рабочих высокой квалификации.

Сравнивать влияние факторов на результат можно также при помощи средних коэффициентов эластичности: $\bar{\varepsilon}_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}}.$

$$\text{Вычисляем: } \bar{\varepsilon}_1 = 0,946 \cdot \frac{6,19}{9,6} = 0,61; \bar{\varepsilon}_2 = 0,0856 \cdot \frac{22,3}{9,6} = 0,20.$$

Т.е. увеличение только основных фондов (от своего среднего значения) или только удельного веса рабочих высокой квалификации на 1% увеличивает в среднем выработку продукции на 0,61% или 0,20% соответственно. Таким образом, подтверждается большее влияние на результат y фактора x_1 , чем фактора x_2 .

2. Коэффициенты парной корреляции мы уже нашли:

$$r_{yx_1} = 0,970; \quad r_{yx_2} = 0,941; \quad r_{x_1x_2} = 0,943.$$

Они указывают на весьма сильную связь каждого фактора с результатом, а также высокую межфакторную зависимость (факторы x_1 и x_2 явно коллинеарны, т.к. $r_{x_1x_2} = 0,943 > 0,7$). При такой сильной межфакторной зависимости рекомендуется один из факторов исключить из рассмотрения.

Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при элиминировании (устранении влияния) других факторов, включенных в уравнение регрессии.

При двух факторах частные коэффициенты корреляции рассчитываются следующим образом:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r_{yx_2}^2) \cdot (1 - r_{x_1x_2}^2)}} = \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{\sqrt{(1 - 0,941^2) \cdot (1 - 0,943^2)}} = 0,734;$$

$$r_{y_{x_2} \cdot x_1} = \frac{r_{y_{x_2}} - r_{y_{x_1}} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{(1 - r_{y_{x_1}}^2) \cdot (1 - r_{x_1 x_2}^2)}} = \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{\sqrt{(1 - 0,970^2) \cdot (1 - 0,943^2)}} = 0,325.$$

Если сравнить коэффициенты парной и частной корреляции, то можно увидеть, что из-за высокой межфакторной зависимости коэффициенты парной корреляции дают завышенные оценки тесноты связи. Именно по этой причине рекомендуется при наличии сильной коллинеарности (взаимосвязи) факторов исключать из исследования тот фактор, у которого теснота парной зависимости меньше, чем теснота межфакторной связи.

Коэффициент множественной корреляции определить через матрицу парных коэффициентов корреляции:

$$R_{y_{x_1} x_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta_r}{\Delta_{r_{11}}}},$$

где

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & r_{y_{x_1}} & r_{y_{x_2}} \\ r_{y_{x_1}} & 1 & r_{x_1 x_2} \\ r_{y_{x_2}} & r_{x_2 x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы парных коэффициентов корреляции;

$$\Delta_{r_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} \\ r_{x_2 x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

– определитель матрицы межфакторной корреляции.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & 0,970 & 0,941 \\ 0,970 & 1 & 0,943 \\ 0,941 & 0,943 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0,8607 + 0,8607 -$$

$$-0,8855 - 0,8892 - 0,9409 = 0,0058$$

$$\Delta_{r_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & 0,943 \\ 0,943 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,8892 = 0,1108.$$

Коэффициент множественной корреляции

$$R_{y_{x_1} x_2} = \sqrt{1 - \frac{0,0058}{0,1108}} = 0,973.$$

Аналогичный результат получим при использовании других формул:

$$R_{y_{x_1} x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{0,305}{5,74}} = 0,973;$$

$$R_{y_{x_1} x_2} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{y_{x_i}}} = \sqrt{0,746 \cdot 0,970 + 0,237 \cdot 0,941} = 0,973;$$

$$R_{y_{x_1 x_2} \dots x_m} = \sqrt{1 - (1 - r_{y_{x_1}}^2) \cdot (1 - r_{y_{x_2} \cdot x_1}^2)} = \\ = \sqrt{1 - (1 - 0,970^2) \cdot (1 - 0,325^2)} = 0,973$$

Коэффициент множественной корреляции показывает на весьма сильную связь всего набора факторов с результатом.

3. Нескорректированный коэффициент множественной детерминации $R_{y_{x_1 x_2}}^2 = 0,947$ оценивает долю вариации результата за счет представленных в уравнении факторов в общей вариации результата. Здесь эта доля составляет 94,7% и указывает на весьма высокую степень обусловленности вариации результата вариацией факторов, иными словами – на весьма тесную связь факторов с результатом.

Скорректированный коэффициент множественной детерминации

$$R^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-m-1)} = 1 - (1 - 0,947) \frac{20-1}{20-2-1} = 0,941$$

определяет тесноту связи с учетом степеней свободы общей и остаточной дисперсий. Он дает такую оценку тесноты связи, которая не зависит от числа факторов и поэтому может сравниваться по разным моделям с разным числом факторов. Оба коэффициента указывают на весьма высокую (более 94%) детерминированность результата y в модели факторами x_1 и x_2 .

4. Оценку надежности уравнения регрессии в целом и показателя тесноты связи $R_{y_{x_1 x_2}}$ дает F - критерий Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}.$$

В нашем случае фактическое значение F - критерия Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{0,973^2}{1 - 0,973^2} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 151,88.$$

Получили, что $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}} = 3,49$ (при $n = 20$), т.е. вероятность случайно получить такое значение F - критерия не превышает допустимый уровень значимости 5%. Следовательно, полученное значение не случайно, оно сформировалось под влиянием существенных факторов, т.е. подтверждается статистическая значимость всего уравнения и показателя тесноты связи $R_{y_{x_1 x_2}}^2$.

5. С помощью частных F - критериев Фишера оценим целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 при помощи формул:

$$F_{\text{част, } x_1} = \frac{R_{y_{x_1 x_2}}^2 - R_{y_{x_2}}^2}{1 - R_{y_{x_1}}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m};$$

$$F_{\text{част, } x_2} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - R_{yx_1}^2}{1 - R_{yx_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}.$$

Найдем $R_{yx_1}^2$ и $R_{yx_2}^2$.

$$R_{yx_1}^2 = r_{yx_1}^2 = 0,970^2 = 0,941; \quad R_{yx_2}^2 = r_{yx_2}^2 = 0,941^2 = 0,885.$$

Имеем

$$F_{\text{част, } x_1} = \frac{0,947 - 0,885}{1 - 0,941} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 8,9322;$$

$$F_{\text{част, } x_2} = \frac{0,947 - 0,941}{1 - 0,885} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 0,4435.$$

Получили, что $F_{\text{част, } x_2} < F_{\text{табл}} = 3,49$. Следовательно, включение в модель фактора x_2 после того, как в модель включен фактор x_1 статистически нецелесообразно: прирост факторной дисперсии за счет дополнительного признака x_2 оказывается незначительным, несущественным; фактор x_2 включать в уравнение после фактора x_1 не следует.

Если поменять первоначальный порядок включения факторов в модель и рассмотреть вариант включения x_1 после x_2 , то результат расчета частного F -критерия для x_1 будет иным. $F_{\text{част, } x_1} > F_{\text{табл}} = 3,49$, т.е. вероятность его случайного формирования меньше принятого стандарта $\alpha = 0,05$ (5%). Следовательно, значение частного F -критерия для дополнительно включенного фактора x_1 не случайно, является статистически значимым, надежным, достоверным: прирост факторной дисперсии за счет дополнительного фактора x_1 является существенным. Фактор x_1 должен присутствовать в уравнении, в том числе в варианте, когда он дополнительно включается после фактора x_2 .

6. Общий вывод состоит в том, что множественная модель с факторами x_1 и x_2 с $R_{yx_1x_2}^2 = 0,947$ содержит неинформативный фактор x_2 . Если исключить фактор x_2 , то можно ограничиться уравнением парной регрессии:

$$\hat{y}_x = \alpha_0 + \alpha_1 x = 1,99 + 1,23 \cdot x, \quad r_{yx}^2 = 0,941.$$

2.1 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

По 20 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника y (тыс. руб.) от ввода в действие новых основных фондов x_1 (% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих x_2 (%) (смотри таблицу своего варианта).

Требуется:

1. Построить линейную модель множественной регрессии. Записать стандартизованное уравнение множественной регрессии. На основе стандартизованных коэффициентов регрессии и средних коэффициентов эластичности ранжировать факторы по степени их влияния на результат.

2. Найти коэффициенты парной, частной и множественной корреляции. Проанализировать их.

3. Найти скорректированный коэффициент множественной детерминации. Сравнить его с нескорректированным (общим) коэффициентом детерминации.

4. С помощью F - критерия Фишера оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента детерминации $R^2_{y x_1 x_2}$.

5. С помощью частных F - критериев Фишера оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора x_1 после x_2 и фактора x_2 после x_1 .

6. Составить уравнение линейной парной регрессии, оставив лишь один значащий фактор.

Вариант 1

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,7	9	11	11	6,3	22
2	7	3,7	11	12	11	6,4	22
3	7	3,9	11	13	11	7,2	23
4	7	4,1	15	14	12	7,5	25
5	8	4,2	17	15	12	7,9	27
6	8	4,9	19	16	13	8,1	30
7	8	5,3	19	17	13	8,4	31
8	9	5,1	20	18	13	8,6	32
9	10	5,6	20	19	14	9,5	35
10	10	6,1	21	20	15	9,5	36

Вариант 2

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,5	9	11	10	6,3	22
2	7	3,6	10	12	10	6,5	22
3	7	3,9	12	13	11	7,2	24
4	7	4,1	17	14	12	7,5	25
5	8	4,2	18	15	12	7,9	27

6	8	4,5	19	16	13	8,2	30
7	9	5,3	19	17	13	8,4	31
8	9	5,5	20	18	14	8,6	33
9	10	5,6	21	19	14	9,5	35
10	10	6,1	21	20	15	9,6	36

Вариант 3

Номер предприя- тия	y	x_1	x_2	Номер предприя- тия	y	x_1	x_2
1	7	3,6	9	11	10	6,3	21
2	7	3,6	11	12	11	6,9	23
3	7	3,7	12	13	11	7,2	24
4	8	4,1	16	14	12	7,8	25
5	8	4,3	19	15	13	8,1	27
6	8	4,5	19	16	13	8,2	29
7	9	5,4	20	17	13	8,4	31
8	9	5,5	20	18	14	8,8	33
9	10	5,8	21	19	14	9,5	35
10	10	6,1	21	20	14	9,7	34

Вариант 4

Номер предприя- тия	y	x_1	x_2	Номер предприя- тия	y	x_1	x_2
1	7	3,5	9	11	10	6,3	21
2	7	3,6	10	12	10	6,8	22
3	7	3,8	14	13	11	7,2	24
4	7	4,2	15	14	12	7,9	25
5	8	4,3	18	15	12	8,1	26
6	8	4,7	19	16	13	8,3	29
7	9	5,4	19	17	13	8,4	31
8	9	5,6	20	18	13	8,8	32
9	10	5,9	20	19	14	9,6	35
10	10	6,1	21	20	14	9,7	36

Вариант 5

Номер предприя- тия	y	x_1	x_2	Номер предприя- тия	y	x_1	x_2
1	7	3,8	11	11	10	6,8	21
2	7	3,8	12	12	11	7,4	23
3	7	3,9	16	13	11	7,8	24
4	7	4,1	17	14	12	7,5	26

5	7	4,6	18	15	12	7,9	28
6	8	4,5	18	16	12	8,1	30
7	8	5,3	19	17	13	8,4	31
8	9	5,5	20	18	13	8,7	32
9	9	6,1	20	19	13	9,5	33
10	10	6,8	21	20	14	9,7	35

Вариант 6

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,8	9	11	11	7,1	22
2	7	4,1	14	12	11	7,5	23
3	7	4,3	16	13	12	7,8	25
4	7	4,1	17	14	12	7,6	27
5	8	4,6	17	15	12	7,9	29
6	8	4,7	18	16	13	8,1	30
7	9	5,3	20	17	13	8,5	32
8	9	5,5	20	18	14	8,7	32
9	11	6,9	21	19	14	9,6	33
10	10	6,8	21	20	15	9,8	36

Вариант 7

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,9	12	11	11	7,1	22
2	7	4,2	13	12	12	7,5	25
3	7	4,3	15	13	13	7,8	26
4	7	4,4	17	14	12	7,9	27
5	8	4,6	18	15	13	8,1	30
6	8	4,8	19	16	13	8,4	31
7	9	5,3	19	17	13	8,6	32
8	9	5,7	20	18	14	8,8	32
9	10	6,9	21	19	14	9,6	34
10	10	6,8	21	20	14	9,9	36

Вариант 8

Номер предприятия	y	x_1	x_2	Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7	3,6	12	11	10	7,2	23
2	7	4,1	14	12	11	7,6	25
3	7	4,3	16	13	12	7,8	26
4	7	4,4	17	14	11	7,9	28

5	7	4,5	18	15	12	8,2	30
6	8	4,8	19	16	12	8,4	31
7	8	5,3	20	17	12	8,6	32
8	8	5,6	20	18	13	8,8	32
9	9	6,7	21	19	13	9,2	33
10	10	6,9	22	20	14	9,6	34

3. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Пример. Пусть имеются некоторые условные данные об общем количестве правонарушений на таможене одного из субъектов РФ.

Таблица 1

Год	Квартал	t	Количество возбужденных дел, y_t
2000	I	1	375
	II	2	371
	III	3	869
	IV	4	1015
2001	I	5	357
	II	6	471
	III	7	992
	IV	8	1020
2002	I	9	390
	II	10	355
	III	11	992
	IV	12	905
2003	I	13	461
	II	14	454
	III	15	920
	IV	16	927

Построим поле корреляции:

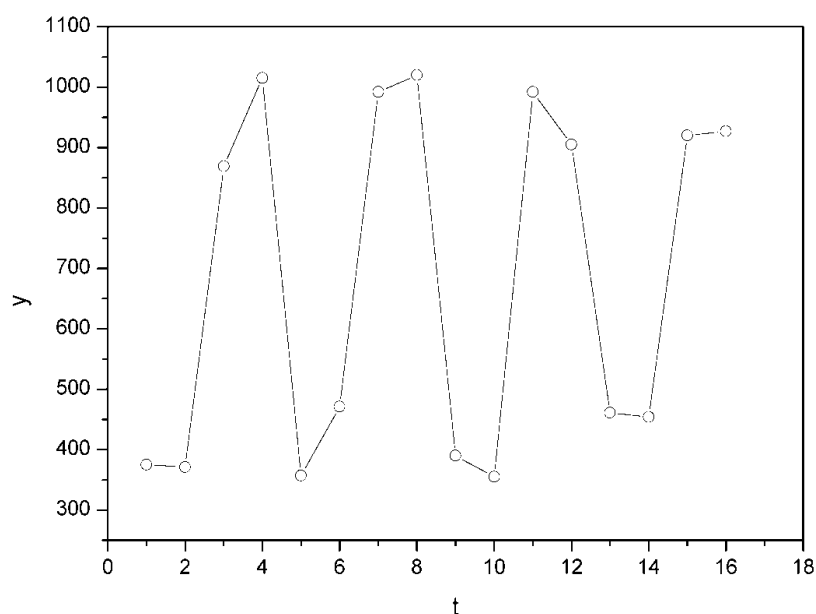


Рис. 1.

Уже исходя из графика видно, что значения y образуют пилообразную фигуру. Рассчитаем несколько последовательных коэффициентов автокорреляции. Для этого составляем первую вспомогательную таблицу.

Таблица 2

t	y_t	y_{t-1}	$y_t - \bar{y}_1$	$y_{t-1} - \bar{y}_2$	$(y_t - \bar{y}_1) \times (y_{t-1} - \bar{y}_2)$	$(y_t - \bar{y}_1)^2$	$(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	375	—	—	—	—	—	—
2	371	375	-328,33	-288,13	94601,72	107800,59	83018,90
3	869	371	169,67	-292,13	-49565,70	28787,91	85339,94
4	1015	869	315,67	205,87	64986,98	99647,55	42382,46
5	357	1015	-342,33	351,87	-120455,66	117189,83	123812,50
6	471	357	-228,33	-306,13	69898,66	52134,59	93715,58
7	992	471	292,67	-192,13	-56230,69	85655,73	36913,94
8	1020	992	320,67	328,87	105458,74	102829,25	108155,48
9	390	1020	-309,33	356,87	-110390,60	95685,05	127356,20
10	355	390	-344,33	-273,13	94046,85	118563,15	74600,00
11	992	355	292,67	-308,13	-90180,41	85655,73	94944,10
12	905	992	205,67	328,87	67638,69	42300,15	108155,48
1	2	3	4	5	6	7	8
13	461	905	-238,33	241,87	-57644,88	56801,19	58501,10
14	454	461	-245,33	-202,13	49588,55	60186,81	40856,54
15	920	454	220,67	-209,13	-46148,72	48695,25	43735,36
16	927	920	227,67	256,87	58481,59	51833,63	65982,20

Сумма	10499	9947	9,05	0,05	74085,16	1153766,39	1187469,73
Среднее значение	699,33	663,13	—	—	—	—	—

Следует заметить, что среднее значение получается путем деления не на 16, а на 15, т.к. у нас теперь на одно наблюдение меньше.

Теперь вычисляем коэффициент автокорреляции первого порядка формуле:

$$r_1 = \frac{74085,16}{\sqrt{1153756,39 \cdot 1187469,73}} = 0,063294.$$

Составляем вспомогательную таблицу для расчета коэффициента автокорреляции второго порядка.

Таблица 3

t	y_t	y_{t-2}	$y_t - \bar{y}_3$	$y_{t-2} - \bar{y}_4$	$(y_t - \bar{y}_3) \times (y_{t-2} - \bar{y}_4)$	$(y_t - \bar{y}_3)^2$	$(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	375	—	—	—	—	—	—
2	371	—	—	—	—	—	—
3	869	375	145,57	-269,79	-39273,33	21190,62	72786,64
4	1015	371	291,57	-273,79	-79828,95	85013,06	74960,96
5	357	869	-366,43	224,21	-82157,27	134270,94	50270,12
6	471	1015	-252,43	370,21	-93452,11	63720,90	137055,44
7	992	357	268,57	-287,79	-77291,76	72129,84	82823,08
8	1020	471	296,57	-173,79	-51540,90	87953,76	30202,96
9	390	992	-333,43	347,21	-115770,23	111175,56	120554,78
10	355	1020	-368,43	375,21	-138238,62	135740,66	140782,54
11	992	390	268,57	-254,79	-68428,95	72129,84	64917,94
12	905	355	181,57	-289,79	-52617,17	32967,66	83978,24
13	461	992	-262,43	347,21	-91118,32	68869,50	120554,78
14	454	905	-269,43	260,21	-70108,38	72592,52	67709,24
15	920	461	196,57	-183,79	-36127,60	38639,76	33778,76
16	927	454	203,57	-190,79	-38839,12	41440,74	36400,82
Сумма	10128	9027	-0,02	-0,06	-1034792,71	1037835,43	1116776,36
Среднее значение	723,43	644,79	—	—	—	—	—

Следовательно, $r_2 = \frac{-1034792,71}{\sqrt{1037835,43 \cdot 1116776,36}} = -0,961183.$

Аналогично находим коэффициенты автокорреляции более высоких порядков, а все полученные значения заносим в сводную таблицу.

Таблица 4

Лаг	Коэффициент автокорреляции уровней
1	0,063294
2	−0,961183
3	−0,036290
4	0,964735
5	0,050594
6	−0,976516
7	−0,069444
8	0,964629
9	0,162064
10	−0,972918
11	−0,065323
12	0,985761

Коррелограмма:

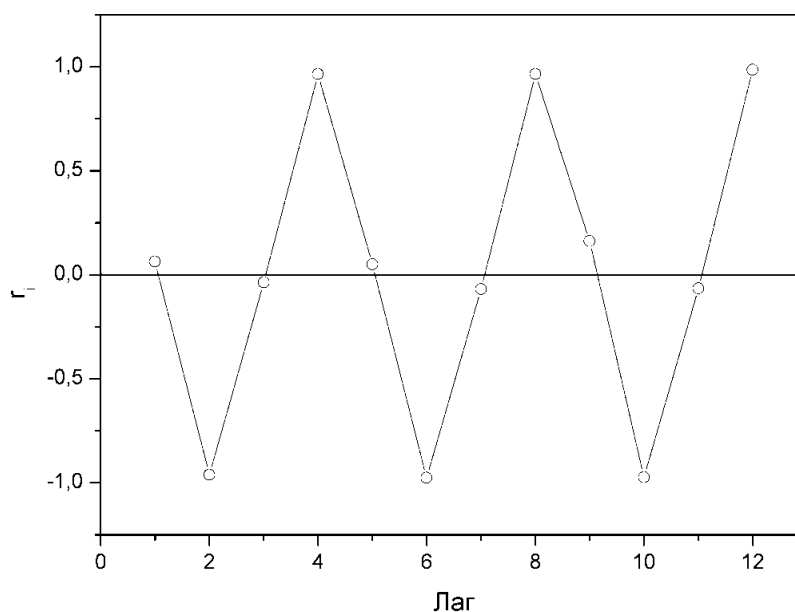


Рис. 5.

Анализ коррелограммы и графика исходных уровней временного ряда позволяет сделать вывод о наличии в изучаемом временном ряде сезонных колебаний периодичностью в четыре квартала.

3.1 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Имеются условные данные об объемах потребления электроэнергии (y_t) жителями региона за 16 кварталов.

Требуется:

1. Построить автокорреляционную функцию и сделать вывод о наличии сезонных колебаний.
2. Построить аддитивную модель временного ряда (для нечетных вариантов) или мультипликативную модель временного ряда (для четных вариантов).
3. Сделать прогноз на 2 квартала вперед.

Варианты 1,2

t	y_t	t	y_t
1	5,8	9	7,9
2	4,5	10	5,5
3	5,1	11	6,3
4	9,1	12	10,8
5	7,0	13	9,0
6	5,0	14	6,5
7	6,0	15	7,0
8	10,1	16	11,1

Варианты 3, 4

t	y_t	t	y_t
1	5,5	9	8,0
2	4,6	10	5,6
3	5,0	11	6,4
4	9,2	12	10,9
5	7,1	13	9,1
6	5,1	14	6,4
7	5,9	15	7,2
8	10,0	16	11,0

Варианты 5, 6

t	y_t	t	y_t
1	5,3	9	8,2
2	4,7	10	5,5
3	5,2	11	6,5
4	9,1	12	11,0
5	7,0	13	8,9
6	5,0	14	6,5
7	6,0	15	7,3
8	10,1	16	11,2

Варианты 7, 8

t	y_t	t	y_t
-----	-------	-----	-------

1	5,5	9	8,3
2	4,8	10	5,4
3	5,1	11	6,4
4	9,0	12	10,9
5	7,1	13	9,0
6	4,9	14	6,6
7	6,1	15	7,5
8	10,0	16	11,2

Варианты 9, 10

t	y_t	t	y_t
1	5,6	9	8,2
2	4,7	10	5,6
3	5,2	11	6,4
4	9,1	12	10,8
5	7,0	13	9,1
6	5,1	14	6,7
7	6,0	15	7,5
8	10,2	16	11,3

4. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пример. Изучается модель вида

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C_t – расходы на потребление в период t , Y_t – совокупный доход в период t , I_t – инвестиции в период t , r_t – процентная ставка в период t , M_t – денежная масса в период t , G_t – государственные расходы в период t , C_{t-1} – расходы на потребление в период $t-1$, I_{t-1} – инвестиции в период $t-1$. Первое уравнение – функция потребления, второе уравнение – функция инвестиций, третье уравнение – функция денежного рынка, четвертое уравнение – тождество дохода.

Модель представляет собой систему одновременных уравнений. Проверим каждое ее уравнение на идентификацию.

Модель включает четыре эндогенные переменные (C_t, I_t, Y_t, r_t) и четыре предопределенные переменные (две экзогенные переменные – M_t и G_t и две лаговые переменные – C_{t-1} и I_{t-1}).

Проверим необходимое условие идентификации для каждого из уравнений модели.

Первое уравнение: $C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1$. Это уравнение содержит две эндогенные переменные C_t и Y_t и одну предопределенную переменную C_{t-1} . Таким образом, $H = 2$, а $D = 4 - 1 = 3$, т.е. выполняется условие $D + 1 > H$. Уравнение свержидентифицируемо.

Второе уравнение: $I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2$. Оно включает две эндогенные переменные I_t и r_t и одну экзогенную переменную I_{t-1} . Выполняется условие $D + 1 = 3 + 1 > H = 2$. Уравнение свержидентифицируемо.

Третье уравнение: $r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3$. Оно включает две эндогенные переменные Y_t и r_t и одну экзогенную переменную M_t . Выполняется условие $D + 1 = 3 + 1 > H = 2$. Уравнение свержидентифицируемо.

Четвертое уравнение: $Y_t = C_t + I_t + G_t$. Оно представляет собой тождество, параметры которого известны. Необходимости в идентификации нет.

Проверим для каждого уравнения достаточное условие идентификации. Для этого составим матрицу коэффициентов при переменных модели.

	C_t	I_t	r_t	Y_t	C_{t-1}	I_{t-1}	M_t	G_t
I уравнение	-1	0	0	b_{11}	b_{12}	0	0	0
II уравнение	0	-1	b_{21}	0	0	b_{22}	0	0
III уравнение	0	0	-1	b_{31}	0	0	b_{32}	0
Тождество	1	1	0	-1	0	0	0	1

В соответствии с достаточным условием идентификации ранг матрицы коэффициентов при переменных, не входящих в исследуемое уравнение, должен быть равен числу эндогенных переменных модели без одного.

Первое уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

	I_t	r_t	I_{t-1}	M_t	G_t
II уравнение	-1	b_{21}	b_{22}	0	0
III уравнение	0	-1	0	b_{32}	0
Тождество	1	0	0	0	1

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3×3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{22}b_{32} \neq 0.$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Второе уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

	C_t	Y_t	C_{t-1}	M_t	G_t
I уравнение	-1	b_{11}	b_{12}	0	0
III уравнение	0	b_{31}	0	b_{32}	0
Тождество	1	-1	0	0	1

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3×3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{12}b_{32} \neq 0.$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Третье уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

	C_t	I_t	C_{t-1}	I_{t-1}	G_t
I уравнение	-1	0	b_{12}	0	0
II уравнение	0	-1	0	b_{22}	0
Тождество	1	1	0	0	1

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3×3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{12}b_{22} \neq 0.$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Таким образом, все уравнения модели сверхидентифицируемы. Приведенная форма модели в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} C_t = A_1 + \delta_{11}C_{t-1} + \delta_{12}I_{t-1} + \delta_{13}M_t + \delta_{14}G_t + u_1, \\ I_t = A_2 + \delta_{21}C_{t-1} + \delta_{22}I_{t-1} + \delta_{23}M_t + \delta_{24}G_t + u_2, \\ r_t = A_3 + \delta_{31}C_{t-1} + \delta_{32}I_{t-1} + \delta_{33}M_t + \delta_{34}G_t + u_3, \\ Y_t = A_4 + \delta_{41}C_{t-1} + \delta_{42}I_{t-1} + \delta_{43}M_t + \delta_{44}G_t + u_1. \end{cases}$$

4.1 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Даны системы эконометрических уравнений.

Требуется

1. Применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицируемо ли каждое из уравнений модели.
2. Определите метод оценки параметров модели.
3. Запишите в общем виде приведенную форму модели.

Вариант 1

Модель протекционизма Сальватора (упрощенная версия):

$$\begin{cases} M_t = a_1 + b_{12}N_t + b_{13}S_t + b_{14}E_{t-1} + b_{15}M_{t-1} + \varepsilon_1, \\ N_t = a_2 + b_{21}M_t + b_{23}S_t + b_{26}Y_t + \varepsilon_2, \\ S_t = a_3 + b_{31}M_t + b_{32}N_t + b_{36}X_t + \varepsilon_3. \end{cases}$$

где M – доля импорта в ВВП; N – общее число прошений об освобождении от таможенных пошлин; S – число удовлетворенных прошений об освобождении от таможенных пошлин; E – фиктивная переменная, равная 1 для тех лет, в которые курс доллара на международных валютных рынках был искусственно завышен, и 0 – для всех остальных лет; Y – реальный ВВП; X – реальный объем чистого экспорта; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 2

Макроэкономическая модель (упрощенная версия модели Клейна):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{13}T_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{24}K_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t, \end{cases}$$

где C – потребление; I – инвестиции; Y – доход; T – налоги; K – запас капитала; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 3

Макроэкономическая модель экономики США (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{23}r_t + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{34}M_t + b_{35}r_{t-1} + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – инвестиции; r – процентная ставка; M – денежная масса; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 4

Модель Кейнса (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – валовые инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 5

Модель денежного и товарного рынков:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{14}M_t + \varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{23}I_t + b_{25}G_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{31}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – реальный ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции; G – реальные государственные расходы.

Вариант 6

Модифицированная модель Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – потребление; Y – доход; I – инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 7

Макроэкономическая модель:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}D_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{22}Y_t + b_{23}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = D_t + T_t, \\ D_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – расходы на потребление; Y – чистый национальный продукт; D – чистый национальный доход; I – инвестиции; T – косвенные налоги; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Вариант 8

Гипотетическая модель экономики:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}J_t + \varepsilon_1, \\ J_t = a_2 + b_{21}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ T_t = a_3 + b_{31}Y_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + J_t + G_t, \end{cases}$$

где C – совокупное потребление в период t ; Y – совокупный доход в период t ; J – инвестиции в период t ; T – налоги в период t ; G – государственные доходы в период t .

Вариант 9

Модель денежного рынка:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{11}M_t + b_{12}Y_t + \varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{22}I_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{33}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R – процентные ставки; Y – ВВП; M – денежная масса; I – внутренние инвестиции.

Вариант 10

Конъюнктурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}r_t + b_{22}I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C – расходы на потребление; Y – ВВП; I – инвестиции; r – процентная ставка; M – денежная масса; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

II. МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

1. Таблица значений F - критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44

60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

2. Критические значения t - критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10, 0,05, 0,01 (двухсторонний)

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	00,10	0,05	0,01		00,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,5041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

**3. Значения статистик Дарбина-Уотсона $d_L d_U$ при 5%-ном
уровне значимости**

n	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02				
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,85	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,99
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

III. ПРИМЕРНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЧЕТА (ЭКЗАМЕНА)

1. Эконометрика как наука. Предмет цель и задачи эконометрики.
2. Эконометрическая модель – основа механизма эконометрического моделирования. Классы моделей.
3. Эконометрические переменные и эконометрические модели. Типы данных и виды переменных в эконометрических исследованиях.
4. Задачи, решаемые с помощью эконометрических моделей.
5. Основные этапы эконометрического моделирования.
6. Основные проблемы эконометрического моделирования.
7. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
8. Спецификация модели.
9. Двумерная (однофакторная) регрессионная модель.
10. Метод наименьших квадратов.
11. Линейная регрессия. Оценка параметров парной линейной регрессии и их экономическая интерпретация.
12. Расчет и интерпретация коэффициента корреляции для парной линейной регрессии.
13. Показатели качества регрессии. Понятие о коэффициенте эластичности и его характеристика.
14. Прогноз по уравнению регрессии. Средняя ошибка аппроксимации.
15. Коэффициент детерминации и его характеристика.
16. Проверка гипотезы о значимости уравнения регрессии в целом.
17. t-критерий Стьюдента в оценке значимости коэффициента корреляции.
18. Нелинейная регрессия по включаемым в нее объясняющим переменным, но линейная по оцениваемым параметрам.
19. Нелинейная регрессия по оцениваемым параметрам.
20. Расчет индекса корреляции для парной нелинейной регрессии.
21. Множественная регрессия. Отбор факторных признаков при построении множественной регрессии.
22. Оценка параметров множественной регрессии.
23. Множественная и частная корреляция. Частный коэффициент корреляции.
24. Понятие мультиколлинеарности и способы ее устранения.
25. Временные ряды. Основные понятия и сведения. Задачи и этапы анализа временных рядов. График.
26. Стационарные временные ряды и их характеристики. Выборочная частная автокорреляционная функция. Формулы вычисления.
27. Аналитическое выравнивание временного ряда. Прогнозирование на основе моделей временных рядов, на различных примерах.
28. Общее понятие о системе одновременных уравнений и ее составление.
29. Виды систем эконометрических уравнений.
30. Структурная и приведенная форма модели.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Бородич, С. А. Эконометрика. Практикум : учебное пособие / С.А. Бородич. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 329 с. : ил. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-009429-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1228789> - Режим доступа: по подписке.
2. Невежин, В. П. Практическая эконометрика в кейсах : учебное пособие / В. П. Невежин, Ю. В. Невежин. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2024. — 317 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс]. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/20052. - ISBN 978-5-8199-0958-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2134796> - Режим доступа: по подписке.
3. Ниворожкина, Л. И. Эконометрика : теория и практика : учеб. пособие / Л.И. Ниворожкина, С.В. Арженовский, Е.П. Кокина. — Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2018. — 207 с. — (Высшее образование). — DOI: <https://doi.org/10.12737/1698-5>. - ISBN 978-5-369-01698-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/907587> - Режим доступа: по подписке.
4. Новиков, А. И. Эконометрика : учебное пособие / А. И. Новиков. - 3-е изд. - Москва : Дашков и К, 2021. - 224 с. - ISBN 978-5-394-04051-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/2085951> - Режим доступа: по подписке.

Дополнительная литература

1. Басовский, Л. Е. Эконометрика : учебное пособие / Л. Е. Басовский. — Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2023. — 48 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-01569-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1918517> - Режим доступа: по подписке.
2. Валентинов, В. А. Эконометрика / Валентинов В.А., - 3-е изд. - Москва : Дашков и К, 2016. - 436 с.: ISBN 978-5-394-02111-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/414907> - Режим доступа: по подписке.
3. Уткин, В. Б. Эконометрика / Уткин В.Б., - 2-е изд. - Москва : Дашков и К, 2017. - 564 с.: ISBN 978-5-394-02145-9. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/415317> - Режим доступа: по подписке.

ЭКОНОМЕТРИКА: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

Методическое пособие

План университета 2025 г. Поз. № 2

Корректор С. М. Бостанова

Компьютерная верстка А. М. Мамчуев

Подписано в печать 19.01. 2025 г.

Формат 60 х 84/16 Бумага офисная

Объем: 2,1 уч. изд. л.

Тираж 100 экз.

**Издательство Карачаево-Черкесского
государственного университета
369202, г. Карачаевск, ул. Ленина, 29
Лицензия ЛР № 040310 от 21.10.1997.**

**Отпечатано в типографии Карачаево-Черкесского
государственного университета
369202, г. Карачаевск, ул. Ленина, 29.**

ДЛЯ ЗАМЕТОК